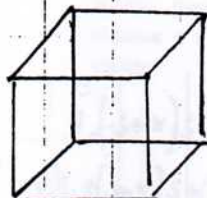


Calcolate i volumi di due cubi, sapendo che i loro spigoli differiscono di $\text{cm } 4$ e le aree delle loro superfici totali differiscono di $\text{cm}^2 384$.

[R. $\text{cm}^3 216$; $\text{dm}^3 1$].

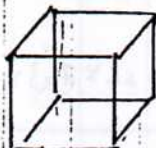


A B

Indico

$$CB = x$$

$$AB = x + 4$$



C D

Impongo

$$6AB^2 - 6CB^2 = 384$$

$$\text{divido } 6$$

$$AB^2 - CB^2 = 64$$

$$(x+4)^2 - x^2 = 64$$

$$x^2 + 8x + 16 - x^2 = 64$$

$$8x = 48 \quad x = 6 \text{ (CB)}$$

$$AB - CB = \text{cm } 4$$

$$A_t(\text{I cubo}) - A_t(\text{II cubo}) = 384 \text{ cm}^2$$

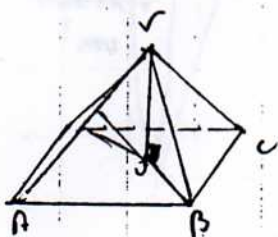
$$AB = \text{cm } (6 + 4) = \text{cm } 10$$

$$V = AB^3 = \text{cm}^3 1000 = \text{dm}^3 1$$

$$V = CB^3 = \text{cm}^3 6^3 = \text{cm}^3 216$$

Lo spigolo laterale di una piramide quadrangolare regolare, la cui base ha l'area di $\text{cm}^2 512$, supera di $\text{cm } 2$ l'altezza. Calcolate il volume della piramide.

[R. $\text{cm}^3 10752$].



$$A_{\text{base}} = \text{cm}^2 512$$

$$VB = VO + 2$$

Indico

$$VO = x$$

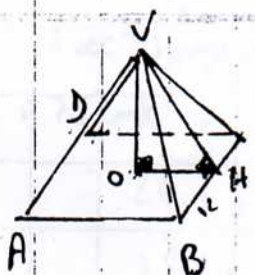
$$VB = x + 2$$

$$OB = \frac{512 : 4}{16} = 16$$

$$\text{calcolo } DB = \sqrt{2A} = \sqrt{2 \cdot 512} = \sqrt{1024} = 32$$

La somma di tutti gli spigoli di una piramide quadrangolare regolare misura $\text{cm } 244$. Sapendo che uno spigolo laterale, aumentato di $\text{cm } 3$, è uguale ai $\frac{5}{3}$ di uno spigolo della base, calcolate l'area della superficie totale della piramide

[R. $\text{cm}^2 2256$].



$$VB + 3 = \frac{5}{3} AB$$

$$VB = \frac{5}{3} AB - 3$$

$$4AB + 4VB = 244 \Rightarrow$$

$$\text{divido } 4$$

Indico

$$AB = x$$

$$VB = \frac{5}{3} x - 3$$

$$A_t = AB^2 + \frac{4AB \cdot VB}{2} = 576 + \frac{96 \cdot 35}{2} = 576 + 1680 = 2256 \text{ cm}^2$$

Impongo

Impongo sul Teorema di Pitagora

$$VO^2 + OB^2 = VB^2$$

$$x^2 + 16^2 = (x+2)^2$$

$$x^2 + 256 = x^2 + 4x + 4$$

$$256 - 4 = 4x$$

$$252 = 4x$$

$$x = \frac{252}{4} = 63$$

Impongo

$$x + \frac{5}{3}x - 3 = 61$$

$$\frac{8}{3}x = 64 + 3$$

$$x = 64 \cdot \frac{3}{8} = 24 \text{ cm}$$

$$VB = \text{cm } 24 \cdot \frac{5}{3} - 3 =$$

$$= 40 - 3 = 37$$

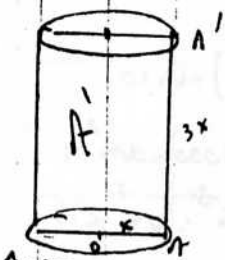
$$BH = \text{cm } 24 : 2 = \text{cm } 12$$

$$BH = \sqrt{VB^2 - OH^2} = \sqrt{37^2 - 12^2} = \sqrt{1369 - 144} = \sqrt{1225} = \text{cm } 35$$

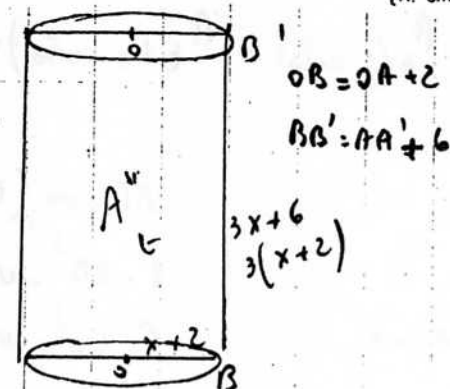
In un cilindro l'altezza è il triplo del raggio di base; aumentando il raggio e l'altezza rispettivamente di cm 2 e cm 6, l'area della superficie totale aumenterebbe di $\text{cm}^2 288\pi$. Calcolate il volume del cilindro.

[R. $\text{cm}^3 1536\pi$].

$$AA' = 3AO$$



$$\begin{aligned} AO &= x \\ AA' &= 3 \cdot x \\ OB &= x+2 \\ BB' &= 3x+6 = 3(x+2) \end{aligned}$$



$$A_t + 288\pi = A_t'$$

↑
Incremento nell'area totale

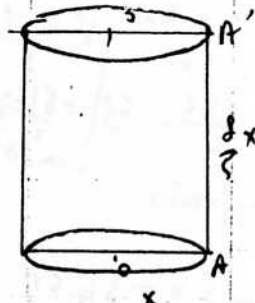
$$2A_{\text{base}} + A_l + 288\pi = A_{\text{base}}' + A_l'$$

Cilindro

$$\begin{aligned} 2x^2\pi + 2x\pi \cdot 3x + 288\pi &= 2(x+2)^2\pi + 2(x+2)\pi \cdot 3(x+2) \\ 2x^2 + 6x^2 + 288 &= 2(x+2)^2 + 6(x+2)^2 \\ 2x^2 + 6x^2 + 288 &= 2(x^2 + 4x + 4) + 6(x^2 + 4x + 4) \\ 2x^2 + 6x^2 + 288 &= 2x^2 + 8x + 8 + 6x^2 + 24x + 24 \\ \text{dando } 4x^2 + 144 &= 4(x+2)^2 \text{ dando } 4 \\ x^2 + 36 &= (x+2)^2 \\ x^2 + 36 &= x^2 + 4x + 4 \\ 32 &= 4x \\ x &= \frac{32}{4} = 8 \text{ cm (OA)} \\ AA' &= 24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V &= A_{\text{base}} \cdot h \\ &= 64\pi \cdot 24 = 1536\pi \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Il rapporto tra l'altezza ed il raggio di un cilindro è $\frac{8}{5}$. Calcolate il volume del cilindro, sapendo che l'area della sua superficie totale è $\text{cm}^2 3250\pi$. [R. $\text{dm}^3 25\pi$].



$$\begin{aligned} AA' &= \frac{8}{5} OA \\ A_t &= \text{cm}^2 3250\pi \end{aligned}$$

Imposto

$$\begin{aligned} \text{Indico} \\ OA &= x \\ AA' &= \frac{8}{5}x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2\pi \cdot 2 + 2x\pi \cdot \frac{8}{5}x &= 3250\pi \\ 2x^2 + \frac{16}{5}x^2 &= 3250 \text{ dando } 2 \\ x^2 + \frac{8}{5}x^2 &= 1625 \\ \frac{13}{5}x^2 &= 1625 \\ x^2 &= 1625 \cdot \frac{5}{13} = 625 \\ x &= 25 \end{aligned}$$

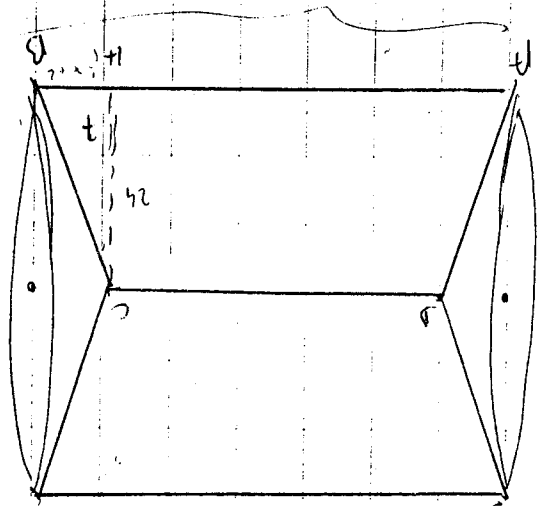
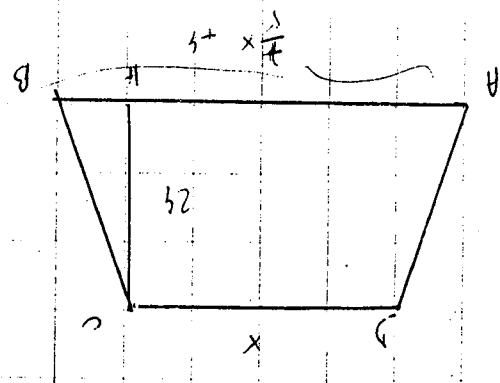
$$x = \sqrt{625} = 25 \text{ (OA)}$$

$$AA' = 25 \cdot \frac{8}{5} = 40$$

$$\begin{aligned} V &= OA^2\pi \cdot AA' \\ &= 625\pi \cdot 40 \\ &= 25000\pi \\ &= 25\pi \end{aligned}$$

Un trapezio isoscele ha l'altezza lunga cm 24. Sapendo che la base maggiore è $\frac{5}{7}$ della base minore aumentati di cm 4 e che il volume del solido, generato da una rotazione completa del trapezio intorno alla base minore è $\text{cm}^3 19776\pi$, calcolate l'area della superficie totale dello stesso solido.

[R. $\text{cm}^2 3072\pi$].



$$C_{\text{lat}} = \text{cm } 24$$

$$A_B = \frac{5}{7} DC + 4$$

$$V = \text{cm}^3 19776\pi$$

$$I_{\text{udica}} = DC = x$$

$$AB = \frac{5}{7}x + 4$$

$$AB = \frac{5}{7} \cdot 24 + 4 = 38$$

$$HB = 24 \cdot \frac{1}{2} + 2 = 14$$

$$CB = 21$$

$$HB = \left(\frac{5}{7}x + 4 \right) : 2 = \frac{5}{14}x + 2 = \frac{5}{14}x + 2$$

$$V_{\text{lat}} - V_{\text{con}} = 19776\pi$$

$$24 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{7}x + 4 \right) - 24 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{14}x + 2 \right) \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = 19776\pi$$

$$3 \cdot \left(\frac{5}{7}x + 4 \right) - 2 \cdot \left(\frac{5}{14}x + 2 \right) = 103$$

$$\frac{5}{21}x + 12 - 2 \cdot \left(\frac{5}{14}x + 2 \right) = 103$$

$$\frac{5}{21}x + 12 - \frac{5}{7}x - 4 = 103$$

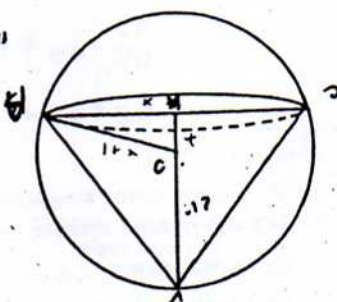
$$\frac{5}{21}x - \frac{5}{7}x = 103 - 12 + 4$$

$$\frac{5}{21}x - \frac{15}{21}x = 95$$

$$-\frac{10}{21}x = 95$$

$$x = -20.25$$

948. Un cono è inscritto in una sfera (fig. 69). Sapendo che la distanza del centro della sfera dal piano della base del cono è cm 7 e che le misure (in cm) del raggio del cono e del raggio della sfera sono due numeri interi consecutivi, calcolate il rapporto tra il volume del cono ed il volume della sfera a meno di 0,01. (R. 0,29).



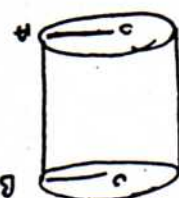
$$\begin{aligned} OA &= R \\ OB &= r \\ OH &= h \end{aligned}$$

Calcolo nell'ipotesi di Ptoleme

$$\begin{aligned} OA^2 + HA^2 &= OA^2 \\ r^2 + h^2 &= (R+1)^2 \\ 49 + x^2 &= x^2 + 2x + 1 \\ 48 &= 2x \\ x &= 24 \\ R &= 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} OA &= 25 \\ VA &= 12 \end{aligned}$$

949. Un cilindro ha l'altezza uguale al $\frac{4}{5}$ del raggio e l'area della superficie totale è cm² 2592 π . Trovate la misura dell'altezza. (R. cm 30).

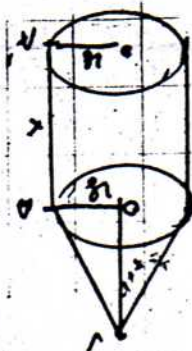


$$\begin{aligned} AB &= \frac{4}{5} OA \\ AB &= \frac{4}{5} x \end{aligned}$$

Calcolo nell'area totale

$$\begin{aligned} 2OA^2\pi + 2OA\pi \cdot AB &= 2592\pi \text{ dunque} \\ OA^2 + OA \cdot AB &= 1296 \\ x^2 + x \cdot \frac{4}{5}x &= 1296 \\ x^2 + \frac{4}{5}x^2 &= 1296 \\ \frac{9}{5}x^2 &= 1296 \\ x^2 &= 720 \\ x &= 24 \end{aligned}$$

950. Un solido, il cui volume è cm³ 43120 π , è la somma di un cilindro e di un cono, la cui base coincide con una base del cilindro. Sapendo che il raggio della base comune è lungo cm 28 e che l'altezza del cono supera di cm 5 l'altezza del cilindro, calcolate l'area della superficie totale del solido. (R. cm² 4508 π).



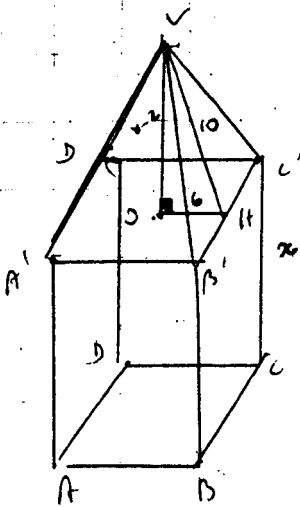
$$\begin{aligned} V &= 43120 \text{ cm}^3 \\ OA &= 28 \\ OA' &= H \\ OA &= h \\ OA' &= h + 5 \\ OA' &= x \\ OA &= x + 5 \end{aligned}$$

Calcolo nel V

$$\begin{aligned} 28^2\pi \cdot x + 28^2\pi \cdot (x+5) &= 43120\pi \\ 28^2\pi \cdot (2x+5) &= 43120\pi \\ 28^2 \cdot (2x+5) &= 43120 \\ 784 \cdot (2x+5) &= 43120 \\ 1568x + 3920 &= 43120 \\ 1568x &= 39200 \\ x &= 25 \end{aligned}$$

Un solido è costituito da un prisma quadrangolare regolare, la cui base ha l'area di $\text{cm}^2 144$, e da una piramide regolare, avente la base coincidente con una base del prisma e l'altezza inferiore di $\text{cm} 2$ all'altezza del prisma. Calcolate l'area della superficie totale del solido, sapendo che il suo volume è $\text{cm}^3 1824$.

[R. $\text{cm}^2 864$]



$$A_{\text{base}} = \text{cm}^2 144$$

$$fO = BB' - 2$$

$$V = \text{cm}^3 1824$$

Indico

$$BB' = x$$

$$fO = x - 2$$

Impongo nel volume

$$V_{\text{prisma}} + V_{\text{pir}} = 1824$$

$$144 \cdot x + 144 \cdot (x-2) \cdot \frac{1}{3} = 1824 \quad \text{divido per } 12$$

$$12x + 12 \cdot (x-2) \cdot \frac{1}{3} = 152 \quad \text{divido per } 4$$

$$3x + x - 2 = 38$$

$$4x = 40$$

$$x = 10 \quad (BB')$$

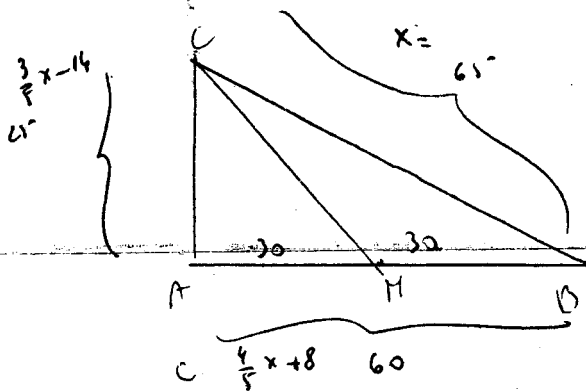
$$fO = \text{cm } 10 - 2 = \text{cm } 8$$

$$OH = \text{cm } 12 - 2 = \text{cm } 10$$

$$fO = \text{cm } 10 \quad (\text{Teorema di Pitagora})$$

$$\begin{aligned} A_t &= A_{\text{base}} + A_{\text{lat}} + A_{\text{pir}} = \\ &= AB^2 + 4 \cdot AB \cdot BB' + \frac{4 \cdot AB \cdot fO}{2} = \\ &= 144 + 4 \cdot 12 \cdot 10 + 24 \cdot 10 = \\ &= 144 + 480 + 240 = \\ &= \text{cm}^2 864 \end{aligned}$$

Il cateto AB di un triangolo rettangolo ABC supera di $\text{cm } 8$ i $\frac{4}{5}$ dell'ipotenusa BC , il cateto AC è uguale ai $\frac{3}{5}$ dell'ipotenusa, diminuiti di $\text{cm } 14$. Detta CM la mediana relativa al vertice C , calcolate il volume del solido ottenuto facendo ruotare il triangolo BMC di un giro completo intorno alla retta AB .
 (R. $\text{cm}^3 6250\pi$).



$$AB = \frac{4}{5} CB + 8$$

$$AC = \frac{3}{5} CB - 14$$

Soluzioni

$$CB = x$$

$$AB = \frac{4}{5} x + 8$$

$$AC = \frac{3}{5} x - 14$$

Impongo sul Teorema di Pitagora

$$AC^2 + AB^2 = CB^2$$

$$\left(\frac{3}{5}x - 14\right)^2 + \left(\frac{4}{5}x + 8\right)^2 = x^2$$

$$\frac{9}{25}x^2 - \frac{84}{5}x + 196 + \frac{16}{25}x^2 + \frac{64}{5}x + 64 = x^2$$

$$-\frac{84}{5}x + \frac{64}{5}x = -64 - 196$$

$$-4x = -260$$

$$4x = 260$$

$$x = \frac{260}{4} = 65 \text{ (CB)}$$

$$AC = \text{cm} \left(65 \cdot \frac{3}{5} - 14\right) = 39 - 14 = \text{cm } 25$$

$$AB = \text{cm} \left(65 \cdot \frac{4}{5} + 8\right) = \text{cm } 60$$

$$AM = \text{cm } 60 : 2 = \text{cm } 30$$

Solido = $\sqrt{\text{cono maggiore}} - \sqrt{\text{cono minore}}$

$$= AC^2 \pi \cdot AB \cdot \frac{1}{3} - AC^2 \pi \cdot AM \cdot \frac{1}{3} =$$

$$= \frac{1}{3} AC^2 \pi \cdot (AB - AM) = \frac{1}{3} 25^2 \pi \cdot (60 - 30) = 625 \pi \cdot \frac{1}{3} \cdot 30 =$$

$$= 6250 \pi \text{ cm}^3$$